Mathematik am IfAM: Angewandte Mathematik, Numerische Analysis und Wissenschaftliches Rechnen

Thomas Wick

AG Wissenschaftliches Rechnen (GWR)
Institut für Angewandte Mathematik (IfAM)
Leibniz Universität Hannover (LUH)

8. Juli 2019
BA/MA-Präsentation

Überblick

Angewandte Mathematik / Numerik

- Angewandte Mathematik = Mathematik, die 'irgendetwas' mit der Realität zu tun hat.
- Numerik: Angewandte Mathematik = Mathematik, die Modelle entwickelt, die in den Computer eingegeben werden, um dann experimentelle Wissenschaft mittels des Computers zu machen.

Angewandte Mathematik / Numerik

- Angewandte Mathematik = Mathematik, die ‘irgendetwas’ mit der Realität zu tun hat.
- Numerik: Angewandte Mathematik = Mathematik, die Modelle entwickelt, die in den Computer eingegeben werden, um dann experimentelle Wissenschaft mittels des Computers zu machen.

In den folgenden Minuten erklären wir die Grundprinzipien der Angewandten Mathematik/Numerik/Wissenschaftlichen Rechnens (WR) anhand eines praktischen Themas:

Rissbildung

Was ist mit Rissbildung gemeint?

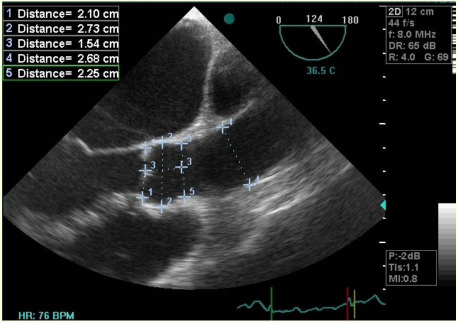
Wo treten Risse auf (I)?

Wo treten Risse auf (I)?

Copyright: IDG.

Wo treten Risse auf (II)?

Wo treten Risse auf (II)?



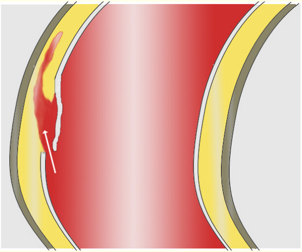


Figure: Fluid-Struktur-Interaktion (FSI). Links: Herzklappe. Rechts: Riss in der Aorta (Kooperation mit Mediziner aus Warschau). Copyright of the right figure: From Wikimedia Commons, the free media repository.

Wo treten Risse auf (IV)?

Wo treten Risse auf (IV)?

Risse im Papier.

Risse im Papier

- Weshalb betrachten wir nun ein Blatt Papier und nicht eines der anderen vorangegangenen Beispiele?

Risse im Papier

- Weshalb betrachten wir nun ein Blatt Papier und nicht eines der anderen vorangegangenen Beispiele?

⇒ Die obigen Situationen sind teilweise zu komplex (also zu schwierig). Daher beginnen wir mit etwas Einfacherem.

Nun zum versprochenen Blatt Papier

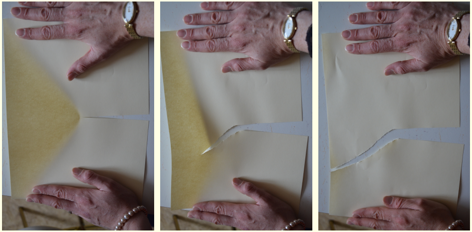


Figure: Experiment: Zerreißen eines Blatt Papiers

- Problemstellung: vorgegebener Riss in einem Blatt Paper;
- Versuchsaufbau: halte Blatt unten fest und verschiebe oben parallel zum Riss;
- Beobachtung: Erhöhung der Scherkraft lässt Blatt anfangs noch nicht reißen. Ab einem bestimmten Zeitpunkt entsteht ein kurvenförmiger Riss;
- Interpretation: Die Scherkräfte am oberen Rand müssen eine kritische Größe überschreiten (kritischer Spannungsintensitätsfaktor), bevor das Blatt reißen kann. Die Rissfortschrittsrichtung kann mit Hilfe der Hauptspannungsrichtungen berechnet werden.

Die zugehörige Mathematik

- Die (angewandte oder auch numerische) Mathematik stellt Werkzeuge bereit, um das mechanisch-physikalische Problem in einer abstrakten Sprache zu formulieren

- Finde die Rissvariable φ und ein Verschiebungsfeld u in einem Gebiet B mit Rand ∂B dass die folgenden Gleichungen erfüllt sind:

$$
\begin{aligned}
-\operatorname{div}\Big(\big((1-k)\varphi^2+k\big)\mathcal{G}e(\mathbf{u})\Big)+\varphi^{1+b}\mathbf{f}-\operatorname{div}\left(\varphi^{1+b}\mathcal{F}\right)&=0 \quad \text{in} \quad B,\\
-G_c\varepsilon\Delta\varphi-\frac{G_c}{\varepsilon}(1-\varphi)+(1-k)\mathcal{G}e(\mathbf{u}):e(\mathbf{u})\varphi&\\
+2\varphi^b(\mathcal{F}:e(\mathbf{u})+\mathbf{f}\cdot\mathbf{u})&\leq 0 \quad \text{in} \quad B,\\
\partial_{\Delta t}\varphi&\leq 0 \quad \text{in} \quad B\\
\Big\{-G_c\varepsilon\Delta\varphi-\frac{G_c}{\varepsilon}(1-\varphi)+(1-k)\mathcal{G}e(\mathbf{u}):e(\mathbf{u})\varphi&\\
+2\varphi^b(\mathcal{F}:e(\mathbf{u})+\mathbf{f}\cdot\mathbf{u})\Big\}\partial_{\Delta t}\varphi&=0 \quad \text{in} \quad B,\\
\mathbf{u}&=0 \quad \text{auf} \quad \partial_D B,\\
\big((1-k)\varphi^2+k\big)\mathcal{G}e(\mathbf{u})\mathbf{n}+\varphi^{1+b}\mathcal{F}\mathbf{n}&=0 \quad \text{auf} \quad \partial_N B.\\
\partial_n\varphi&=0 \quad \text{auf} \quad \partial B,
\end{aligned}
$$

Verbindung zur Angewandten Mathematik/Numerik

- Die vorherige Gleichung wird **diskretisiert**, um diese in eine Software implementieren zu können.
- Die **Diskretisierung** kann auf sog. Differenzenquotienten basieren.
- Die **Diskretisierung** kann aber auch auf Integralgleichungen basieren, welche dann zur Auswertung Approximationsresultate und Quadraturregeln erfordern.

$\rightarrow$ Approximation, Interpolation, numerische Quadratur

Verbindung zur Angewandten Mathematik/Numerik

- Die vorherige Gleichung wird **diskretisiert**, um diese in eine Software implementieren zu können.
- Die **Diskretisierung** kann auf sog. Differenzenquotienten basieren.
- Die **Diskretisierung** kann aber auch auf Integralgleichungen basieren, welche dann zur Auswertung Approximationsresultate und Quadraturregeln erfordern.

→ Approximation, Interpolation, numerische Quadratur

- Ein lineares diskretisiertes System führt auf ein lineares Gleichungssystem.

→ Direkte und iterative Lösungen linearer Gleichungssysteme

Verbindung zur Angewandten Mathematik/Numerik

- Die vorherige Gleichung wird **diskretisiert**, um diese in eine Software implementieren zu können.
- Die **Diskretisierung** kann auf sog. Differenzenquotienten basieren.
- Die **Diskretisierung** kann aber auch auf Integralgleichungen basieren, welche dann zur Auswertung Approximationsresultate und Quadraturregeln erfordern.

$\rightarrow$ Approximation, Interpolation, numerische Quadratur

- Ein lineares diskretisiertes System führt auf ein lineares Gleichungssystem.

$\rightarrow$ Direkte und iterative Lösungen linearer Gleichungssysteme

- Ein nichtlineares diskretisiertes System führt auf ein nichtlineares Gleichungssystem, welches als Nullstellenproblem formuliert werden kann.

$\rightarrow$ Lösung von Nullstellenproblemen

Warum Mathematik, wenn wir das Blatt auch einfach so zerreißen können und wissen was passiert?

- Mathematische Analyse: existiert eine Lösung und ist diese eindeutig? D.h. liefert die Lösung dieser Gleichungen tatsächlich einen Riss (Existenz)? Falls ja, werden die Gleichungen immer denselben Risspfad vorhersagen oder könnte der Riss einen anderen Weg nehmen (Eindeutigkeit)?
- Entwicklung numerischer Algorithmen und Diskretisierung, die dann in Computersprache (z.B. C++, Fortran, MATLAB, octave, python usw.) übersetzt werden können.
- Analyse der numerischen Algorithmen Fehlerabschätzungen, Konvergenzabschätzungen, Effizienz, Robustheit gegenüber 'Störungen', ...
- Diese Gründe sind allerdings noch nicht vollständig stichhaltig ...

Warum Mathematik, wenn wir das Blatt auch einfach so zerreißen können und wissen was passiert?

- Oftmals sind rein theoretische Aussagen und Formeln zu aufwendig zu berechnen, und gelten dann lediglich für eine sehr spezielle (akademische) Konfiguration;
- Andererseits sind Experimente oft zu teuer, zu gefährlich, zu aufwendig oder schlicht unmöglich durchzuführen (z.B. Experimente auf dem Mond);
- Dadurch bildet die numerische Mathematik/das wissenschaftliche Rechnen eine dritte Säule in der wissenschaftlichen Forschung.
- Konkret werden im wissenschaftlichen Rechnen mathematische Modelle, numerische Algorithmen sowie Software mit dem Ziel sog. numerischer Simulationen entwickelt, die dann zur Beantwortung wissenschaftlicher Fragestellungen aus anderen Disziplinen herangezogen werden können.

Zurück zum Blatt Papier: Mathematik und numerische Simulationen

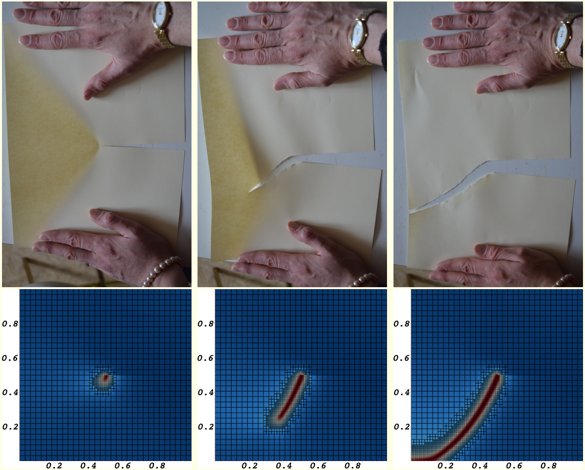


Figure: Experiment und numerische Simulation (Mathematik).

Themen BA/MA-Arbeiten und Studium

- Curricula Angewandte Analysis (Escher/Walker), Numerik/WR (Beuchler/Wick), Optimierung (Steinbach) online auf

  `https://www.ifam.uni-hannover.de/ifam_lehre_aktuell.html`

- Vorkenntnisse für Abschlussarbeiten: siehe ganz grundsätzlich wiederum die Musterstudienpläne auf:

  `https://www.ifam.uni-hannover.de/ifam_lehre_aktuell.html`

BEISPIEL-Studienplan Numerik/WR

Studienplan Numerik

Semester							LP
1	Analysis I (10 LP)	Algebraische Methoden I (10 LP)		Computeralgebra (5 LP)		Einfuehrung in die Physik (10 LP)	35
2	Analysis II (10 LP)	Algebraische Methoden II (10 LP)	Algorithmisches Programmieren (4 LP)	Proseminar (5 LP)			29
3	Fortgeschrittene Analytische Methoden (10 LP)	Fortgeschrittene Algebraische Methoden (10 LP)	Numerische Mathematik I (10 LP)				30
4	Stochastische Methoden (10 LP)	Numerische Mathematik II (10 LP)	Funktionentheorie (10 LP)				30
5	Numerik partieller Differentialgleich. (10 LP)			Seminar (5 LP)	Datenstrukturen und Algorithmen (5 LP)	Grundlagen der theoretischen Informatik (5 LP)	25
6	Diskrete Mathematik (10 LP)			Bachelorarbeit (13 LP)		Analytische Mechanik und Spez. Realtheorie (8 LP)	31

Seite 1

Mögliche Themen für Abschlussarbeiten

- Analyse und Implementierung linearer Löser (z.B. CG-Verfahren),
- Analyse und Implementierung nicht-linearer Löser (z.B. Newton)
- Modellierung und Analyse gekoppelter DGL (Differentialgleichungen), z.B. Fluid-Struktur-Interaktion, Strömungsmechanik, Strukturmechanik, poröse Medien, ...
- Analyse und Entwicklung neuer und innovativer Diskretisierungstechniken,
- ggf. bei entsprechenden Vorkenntnissen auch Arbeiten in Richtung machine learning (aktuelles Thema in Wirtschaft und Forschung!)

Das Ende

Ich wünsche allen gute letzte Semesterwochen und viel Erfolg bei den anstehenden Klausuren!