# Von den reellen zu den komplexen Zahlen

Hochschulinformationstage - Hannover

Betrachte die quadratische Gleichung:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Eine Lösung erhält man via der $p - q$-Formel:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Betrachte die quadratische Gleichung:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Eine Lösung erhält man via der $p - q$-Formel:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

## Bekannt

Ist der Ausdruck unter der Wurzel negativ:

$$\frac{p^2}{4} - q < 0,$$

so hat die quadratische Gleichung keine reelle Lösungen.

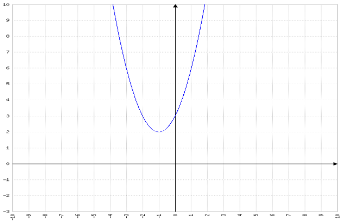



Figure : keine reellen Nullstellen

# Von der reellen Zahlengeraden zur komplexen Ebene

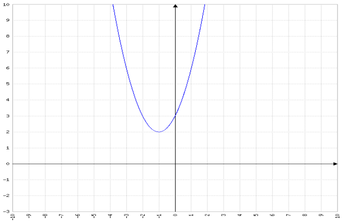



Figure : keine reellen Nullstellen

**Idee:** Wir nehmen eine (abstrakte) Nullstelle der Gleichung

$$x^2 = -1$$

zu den reellen Zahlen hinzu und nennen sie

$$i = \sqrt{-1} = \text{imaginäre Einheit} \qquad \textit{also} \qquad i^2 = -1.$$

# Von der reellen Zahlengeraden zur komplexen Ebene

Darstellung der reellen Zahlen auf einer Geraden:

# Von der reellen Zahlengeraden zur komplexen Ebene

Darstellung der reellen Zahlen auf einer Geraden:

- Die reellen Zahlen sind der Größe nach geordnet und füllen die Zahlengerade vollständig aus (Was genau heißt das?)

# Von der reellen Zahlengeraden zur komplexen Ebene

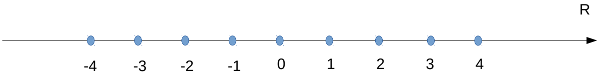
Darstellung der reellen Zahlen auf einer Geraden:

- Die reellen Zahlen sind der Größe nach geordnet und füllen die Zahlengerade vollständig aus (Was genau heißt das?)
- Die ganzen Zahlen $\cdots -2, -1, 0, 1, 2 \cdots$ sind wie "Perlen auf einer Kette" in die reellen Zahlen eingebettet.

# Von der reellen Zahlengeraden zur komplexen Ebene

Darstellung der reellen Zahlen auf einer Geraden:

- Die reellen Zahlen sind der Größe nach geordnet und füllen die Zahlengerade vollständig aus (Was genau heißt das?)
- Die ganzen Zahlen $\cdots - 2, -1, 0, 1, 2 \cdots$ sind wie "Perlen auf einer Kette" in die reellen Zahlen eingebettet.
- Multiplikation mit $-1$ entspricht Punktspiegelung an Null = *Drehung um 180 Grad*.



# Die komplexe Zahlenebene

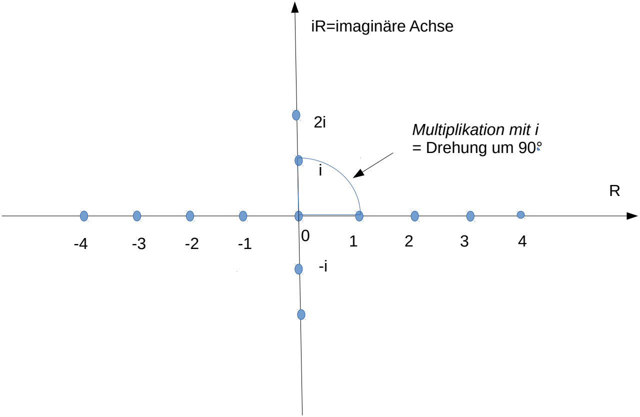



Figure : die Gaußsche Zahleneben

Der Körper der komplexen Zahlen ist gegeben durch:

$$\mathbb{C} := \left\{ a + bi \;:\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Der Körper der komplexen Zahlen ist gegeben durch:

$$\mathbb{C} := \left\{ a + bi \ : \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

- Man kann mit komplexen genau wie mit reellen Zahlen rechnen. Immer wenn $i^2$ auftaucht ersetze es durch $-1$, z.B.

$$(2+i)(3-i\sqrt{2}) = 2\cdot3-2\sqrt{2}i+3i-\underbrace{i^2}_{=-1}\sqrt{2} = 6+\sqrt{2}+(3-2\sqrt{2})i.$$

# Komplexe Zahlen und Polynome

Der Körper der komplexen Zahlen ist gegeben durch:

$$\mathbb{C} := \left\{ a + bi \ : \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

- Man kann mit komplexen genau wie mit reellen Zahlen rechnen. Immer wenn $i^2$ auftaucht ersetze es durch $-1$, z.B.

$$(2+i)(3-i\sqrt{2}) = 2\cdot 3-2\sqrt{2}i+3i-\underbrace{i^2}_{=-1}\sqrt{2} = 6+\sqrt{2}+(3-2\sqrt{2})i.$$

- Falls $\frac{p^2}{4} - q < 0$ in der $p-q$-Formel gilt (Fall keiner reellen Lösungen) hat die quadratische Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

die komplexen Lösungen:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(-1)}\sqrt{q - \frac{p^2}{4}} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\, i.$$

# Und wozu?

Wir haben mit der Konstruktion der komplexen Zahlen viel mehr erreicht als wir eigentlich wollten. Es gilt:

# Und wozu?

Wir haben mit der Konstruktion der komplexen Zahlen viel mehr erreicht als wir eigentlich wollten. Es gilt:

**Satz (Fundamentalsatz der Algebra)**

*Betrachte ein nicht-konstantes Polynom*

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \quad \textit{mit} \quad a_k \in \mathbb{C}.$$

*Dann hat $P(z)$ eine komplexe Nullstelle, d.h. es gibt $z \in \mathbb{C}$ mit*

$$P(z) = 0.$$

# Eine Formel

Die via der imaginären Einheit $i \in \mathbb{C}$, d.h. $i^2 = -1$ gilt eine interessante Beziehung zwischen Größen der Analysis.

# Eine Formel

Die via der imaginären Einheit $i \in \mathbb{C}$, d.h. $i^2 = -1$ gilt eine interessante Beziehung zwischen Größen der Analysis.

Betrachte:

# Eine Formel

Die via der imaginären Einheit $i \in \mathbb{C}$, d.h. $i^2 = -1$ gilt eine interessante Beziehung zwischen Größen der Analysis.

Betrachte:

- die Eulersche Zahl $e$, d.h. $\log e = 1$:

$$e = 2,71828 \cdots = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

# Eine Formel

Die via der imaginären Einheit $i \in \mathbb{C}$, d.h. $i^2 = -1$ gilt eine interessante Beziehung zwischen Größen der Analysis.

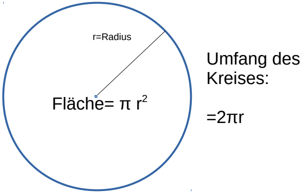
Betrachte:

- die Eulersche Zahl $e$, d.h. $\log e = 1$:

$$e = 2,71828\cdots = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

- die Kreiszahl $\pi$:

$$\pi = 3,141\,592\,654\ \cdots$$



# Die Eulersche Identität

Die Eulersche Identität liefert einen fundamentalen Zusammenhang zwischen:

# Die Eulersche Identität

Die Eulersche Identität liefert einen fundamentalen Zusammenhang zwischen:

- der ganzen Zahl $1$

# Die Eulersche Identität

Die Eulersche Identität liefert einen fundamentalen Zusammenhang zwischen:

- der ganzen Zahl $1$
- der Eulerschen Zahl $e$

# Die Eulersche Identität

Die Eulersche Identität liefert einen fundamentalen Zusammenhang zwischen:

- der ganzen Zahl $1$
- der Eulerschen Zahl $e$
- der imaginären Einheit $i$

# Die Eulersche Identität

Die Eulersche Identität liefert einen fundamentalen Zusammenhang zwischen:

- der ganzen Zahl $1$
- der Eulerschen Zahl $e$
- der imaginären Einheit $i$
- der Kreiszahl $\pi$ .

Die Eulersche Identität liefert einen fundamentalen Zusammenhang zwischen:

- der ganzen Zahl $1$
- der Eulerschen Zahl $e$
- der imaginären Einheit $i$
- der Kreiszahl $\pi$ .

**Die Eulersche Identität**

$$e^{i\pi} = -1.$$

Vielen Dank

für die Aufmerksamkeit!